Über den Energieverbrauch im Clusiusschen Trennrohr beim kontinuierlichen Betrieb

Von H. STEINWEDEL (zurzeit im Wehrdienst). Mitt. aus dem Inst. f. theoret. Physik der T. H. Hannover.

Kürzlich hat *Jensen* eine Übersicht über Erfolge, Wirkungsweise und Theorie des Trennrohres gegeben[1]). Dabei wurde das kontinuierlich betriebene Rohr und insbes. der dafür erforderliche Energieverbrauch nur kurz behandelt. Diese Fragen sollen hier etwas ausführlicher besprochen werden. Für die Behandlung beziehen wir uns auf die Abb. 2 in *J*, l. c., nur mit dem Unterschied, daß das ungetrennte Gas dem Vorratsbehälter nicht oben, sondern unten zugeführt werden soll, und dementsprechend ein konvektiver Gasstrom durch das Trennrohr fließt, dessen Stärke — d. h. die pro Sekunde durch das Rohr fließende Gasmenge (in Gramm) — wir G nennen wollen. Den Molenbruch der leichten Komponenten wollen wir c nennen, wie in *J*, l. c., und den der schwereren Komponente $c^* = 1-c$. Im unteren Vorratsbehälter soll die Ausgangskonzentration c_0 aufrechterhalten werden, während die Konzentration in der oben abgezapften Gasmenge c_z heißen möge. Die erste Aufgabe ist die Bestimmung der für die Erreichung einer gewünschten Endkonzentration c_z erforderlichen Rohrlänge Z in Abhängigkeit vom Gasstrom G. Dazu betrachten wir nun zunächst noch einmal kurz die in *J*, l. c., behandelten Verhältnisse im abgeschlossenen Rohr, die dort in Gl. 19 und 20[2]) niedergelegt und zu Beginn des Abschnitts IV erläutert wurden.

Die Menge τ des leichten Isotops, die infolge der Trennwirkung pro Sekunde nach oben befördert wird, läßt sich danach schreiben als:

$$\tau = \tau_0 \left\{ c(1-c) - l\,\frac{dc}{dz} \right\} \tag{1}$$

wo dc/dz der vertikale Konzentrationsgradient ist, und die beiden Konstanten τ_0 und l durch die Rohrabmessungen, Temperaturdifferenz usw. bestimmt sind.

Kontinuierlicher Betrieb. Wenn nun außerdem ein Gasstrom G durch das Rohr fließt, so wird dadurch die Menge $c \cdot G$ an leichtem Isotop zusätzlich durch das Rohr befördert. Der Gesamttransport ist also $\tau + c \cdot G$, dieser ist andererseits gleich der Menge des oben abgezapften Isotops, also $c_z \cdot G$. Durch Gleichsetzen erhalten wir also

$$c_z \cdot G = \tau + c \cdot G \tag{2}$$

oder, wenn wir τ aus (1) einsetzen und nach dc/dz auflösen, ergibt sich

$$l\,\frac{dc}{dz} = c(1-c) - \frac{G}{\tau_0}(c_z - c) \tag{3}$$

Das ist die Beziehung zwischen Konzentrationsgradienten, Gasstrom und Endkonzentration, die *Waldmann*[3]) auf anderem Wege hergeleitet und auch integriert hat. Die erforderliche Rohrlänge Z erhält man aus (3) durch Integration unter folgenden Randbedingungen: bei $z = 0$ soll c gleich der Ausgangskonzentration c_0 und bei $z = Z$ soll c gleich der gewünschten Konzentration c_z sein.

Ehe wir auf die Lösung von (3) eingehen, wollen wir zunächst noch eine Betrachtung über den größtmöglichen Gasstrom einfügen. Da nämlich der Konzentrationsanstieg dc/dz immer positiv sein muß, darf auch die linke Seite von (3) nirgends negativ sein, d. h., es muß gelten

$$G \leq \tau_0 \frac{c(1-c)}{c_z - c}$$

für alle c zwischen c_0 und c_z. Nun überlegt man sich leicht, daß die rechte Seite der Ungleichung für $c = c_0$ ihren kleinsten Wert hat, also muß gelten

$$G \leq G_{max} = \tau_0 c_0 \frac{1-c_0}{c_z - c_0} \tag{4}$$

Wählt man $G = G_{max}$, so würde die Rohrlänge Z unendlich werden, weil dann dc/dz und auch alle höheren Ableitungen von c nach z bei $z = 0$ verschwinden. Man muß also beim Abzapfen mit G immer unterhalb G_{max} bleiben.

Eine Abschätzung der erforderlichen Rohrlänge erhält man sehr einfach durch folgende Überlegungen: Der Konzentrationsanstieg wird am größten, wenn man in (3) $G = 0$ setzt, die zugehörige Rohrlänge ist dann die des abgeschlossenen Rohres, wir wollen sie Z_0 nennen, sie ergibt sich aus *J*, l. c., Gl. 21, wenn wir darin $z = Z_0$ und $c = c_z$ setzen und sie nach Z_0 auflösen

$$Z_0 = l \cdot \ln \left\{ \frac{c_z}{c_0} \cdot \frac{1-c_0}{1-c_z} \right\} \tag{5}$$

Wenn wir dagegen für G den Bruchteil ε des Grenzwertes G_{max} aus Gl. 4 einsetzen, so folgt aus Gl. (3), daß

$$\frac{dc}{dz} > (1-\varepsilon)\, c\,(1-c)$$

ist, und durch Integration ergibt sich dann

$$Z < \frac{Z_0}{1-\varepsilon} \tag{5a}$$

Damit ergibt sich eine für die meisten Zwecke ausreichende Abschätzung der erforderlichen Rohrlänge. Für die genaue Berechnung ist dagegen die strenge Integration von Gl. 3 erforderlich, die *Waldmann*[3]) angegeben hat. Mit den Abkürzungen

$$\frac{G}{\tau_0} = \gamma \quad \text{und} \quad \Gamma = \sqrt{\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)^2 - \gamma c_z} \tag{6}$$

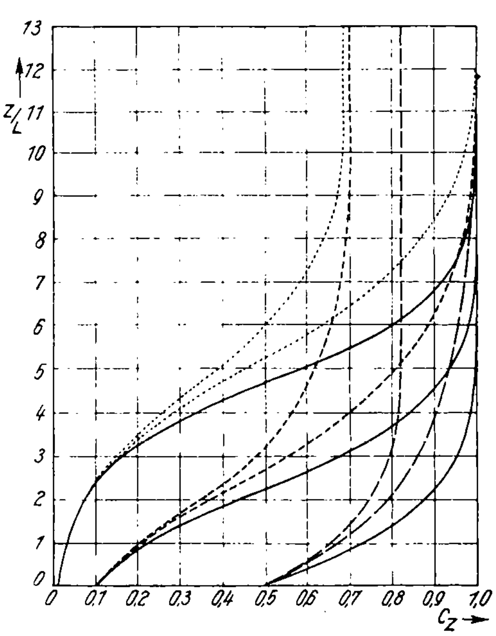
ergibt sich

$$Z = \frac{l}{2\Gamma} \ln \left\{ \frac{\left[c_z - \frac{1+\gamma}{2} + \Gamma\right]\left[c_0 - \frac{1+\gamma}{2} - \Gamma\right]}{\left[c_z - \frac{1+\gamma}{2} - \Gamma\right]\left[c_0 - \frac{1+\gamma}{2} + \Gamma\right]} \right\} \tag{7}$$

Der Zusammenhang ist, wie man sieht, recht verwickelt. Wir haben ihn deshalb in Abb. 1 und 2 graphisch wiedergegeben.

Energieverbrauch: Der Wärmeverbrauch, der für das Aufrechterhalten des Temperaturgefälles erforderlich ist, läßt

[1]) Diese Ztschr. **54**, 405 [1941]. Im folgenden als *J*, l. c., zitiert.
[2]) Bzw. für das drahtgeheizte Rohr in den Gleichungen 20' des Anhanges.
[3]) Z. Physik **114**, 53 [1939], s. bes. Abschnitt 6.



← Abb. 1. Länge des Trennrohrs (in Einheiten L) als Funktion des Gasstroms G und der gewünschten Endkonzentration c_z.

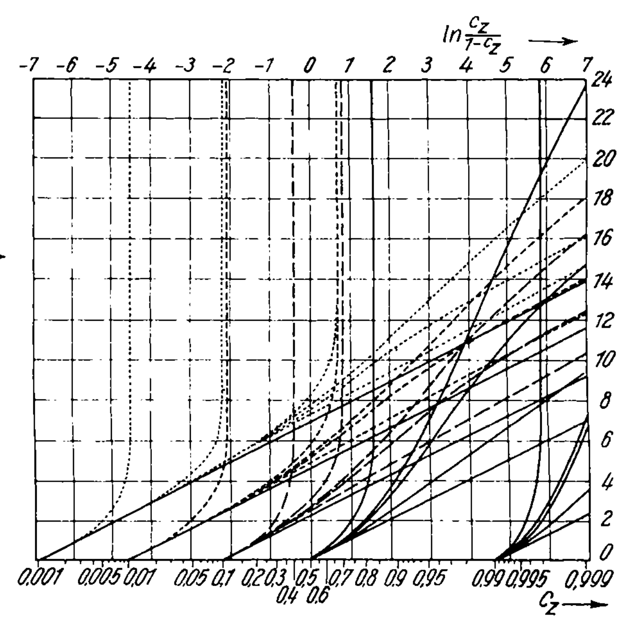
Die von einem festen c_0 ausgehenden Kurvenscharen beziehen sich jedesmal auf die Werte:

$G = 0$; $G = 0{,}9 c_0 \tau_0$; $G = 1{,}5 c_0 \tau_0$.

Abb. 2. Derselbe Zusammenhang wie in Abb. 1 mit logarithmisch gedehnter Abscissenskala entsprechend den am oberen Rand als Abscisse angegebenen Werten. →

Für den Gasstrom G wurden bei den einzelnen Kurvenscharen nacheinander die in der folgenden Übersicht angegebenen Werte gewählt:

c_0	$G/c_0\tau_0$
0,5 und 0,99	0 0,5 0,9 1,0 1,5
0,1	0 0,5 0,9 1,0 1,5 3,0
0,01	0 0,5 0,9 1,0 1,5 10
0,001	0 0,5 0,9 1,0 1,5 10 100



sich nun einfach angeben. Wenn Z die Rohrlänge und U der Rohrumfang ist und Δx der Abstand zwischen innerem und äußerem Rohr, zwischen denen der Temperaturunterschied ΔT aufrechterhalten wird, so fließt, wenn wir noch die Wärmeleitfähigkeit mit λ bezeichnen, pro Sekunde der Wärmestrom Q nach außen:

$$Q_{pro\,s} = ZU\lambda \frac{dT}{dx} = ZU\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x} \tag{8}$$

Gleichzeitig zapfen wir pro Sekunde den Gasstrom G ab, in dem die Konzentration von c_0 auf c_z erhöht ist. Pro Gramm des abgezapften Gases wird also die Wärmemenge $Q_{pro\,s}/G$ verbraucht. Beziehen wir den Wärmeverbrauch auf Mol, so müssen wir $Q_{pro\,s}/G$ noch mit dem Molekulargewicht M multiplizieren

$$Q_{pro\,mol} = M \frac{ZU\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x}}{G} = \frac{MlU\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x}}{\tau_0} \cdot \frac{\frac{Z}{l}}{\frac{G}{\tau_0}} \tag{9}$$

Dabei haben wir in dem letzten Ausdruck eine für das folgende zweckmäßige Umformung vorgenommen. Benutzen wir nämlich nun die Gleichungen (20) aus *J*, l. c., und die aus der kinetischen Gastheorie folgende Beziehung $M\lambda/\rho D = 1,3\, C_v$ (mit C_v = spezifische Wärme pro Mol), so erhalten wir aus (9) schließlich die Gleichung:

$$Q_{pro\,mol} = 1,85 \frac{C_v \Delta T}{\left(\alpha \frac{\Delta T}{T}\right)^2} \left\{1 + 2\left(\frac{\Delta x_0}{\Delta x}\right)^6\right\} \frac{\frac{Z}{l}}{\frac{G}{\tau_0}} \tag{10}$$

Darin ist der letzte Faktor aus Gl. (7) bzw. Abb. 1 oder 2 zu entnehmen. Einen bequemen Überblick erhält man wieder, wenn man für Z/l den kleinstmöglichen Wert (5) und für G/τ_0 den größtmöglichen Wert (4) einsetzt. So ergibt sich:

$$Q_{pro\,mol} > Q_0 \tag{11}$$

mit

$$Q_0 = 1,85 \frac{C_v \Delta T}{\left(\alpha \frac{\Delta T}{T}\right)^2} \left\{1 + 2\left(\frac{\Delta x_0}{\Delta x}\right)^6\right\} \frac{c_z - c_0}{c_0(1-c_0)} \ln\left[\frac{c_z}{c_0}\,\frac{1-c_0}{1-c_z}\right] \tag{11a}$$

Neben dem konzentrationsabhängigen letzten Faktor ist noch die geschweifte Klammer $1 + 2\,(\Delta x_0/\Delta x)^6$ von Interesse. Der zweite Term darin ist (wie in *J*, l. c., bei Gl. 31 erörtert) durch die Rückdiffusion längs des Rohres bedingt. Diese läßt sich unschädlich machen dadurch, daß man die Rohrweite Δx groß macht gegenüber der charakteristischen Weite Δx_0 (vgl. *J*, l. c., Gl. 20c). Jedoch wird dadurch auch nach *J*, l. c., Gl. 20b, die erforderliche Rohrlänge sehr groß; so daß man i. allg. einen größeren Wärmeverbrauch zugunsten einer kleineren Abmessung der Apparatur in Kauf nehmen wird; arbeitet man bei der für kurze Rohrlängen günstigsten Rohrweite ($\Delta x = \Delta x_0$), so frißt nach (10) die Rückdiffusion $^2/_3$ des gesamten Wärmeaufwands auf.

Für den genauen Wert des Wärmeverbrauchs ist Gl. 10 maßgebend. Es ist von Interesse, denjenigen Gasstrom G_{opt} aufzusuchen, bei dem der letzte Faktor in (10) und damit der Wärmeverbrauch möglichst gering wird. Dies ist nur durch numerische Rechnung möglich. In Abb. 3 haben wir die so bestimmten Werte G_{opt}/G_{max} als Funktion von c_0 und c_z aufgetragen und in Abb. 4 den zugehörigen Wärmeverbrauch, Q_{opt}, dividiert durch Q_0. Man erkennt, daß man — je nach dem Konzentrationsintervall — mit dem 1,5- bis 3fachen von Q_0 auskommt. Nur bei extremen Endkonzentrationen c_z braucht man nahezu das 4fache.

Als numerisches Beispiel geben wir den Wärmeaufwand zur Trennung der Chlor-Isotope. Zur Gewinnung ganz reiner Isotope, also mit c_z genau = 1, ist nach (11a) wegen des Ausdrucks $1 - c_z$ im Nenner des Logarithmus ein unendlich großer Wärmeaufwand erforderlich. Wir müssen uns also mit einem bestimmten Reinheitsgrad begnügen und wählen den von *Clusius* u. *Dickel*[4]) erreichten Reinheitsgrad von 99,5%, d. h. $c_z = 0,995$. Weiter wählen wir etwa die bei *Clusius* u. *Dickel* vorliegenden Temperaturen, d. h. $\Delta T/T = 1$ und T etwa 650° K. Für die Thermodiffusionskonstante α wählen wir, da experimentelle Werte nicht vorliegen, die Schätzung aus *J*, l. c., Gl. (1b): $\alpha = 0,009$. Zur Trennung eines Mols HCl müssen wir 0,243 Mol des schweren und 0,757 Mol des leichten Isotops gewinnen. Also bekommen wir $Q_0 = 0,243 \cdot Q_0^{37} + 0,757 \cdot Q_0^{35}$. Setzen wir nun in (11a) $C_v \sim 5$ cal und $\Delta x \gg \Delta x_0$, so ergibt sich

$$Q_0 = 0,8 \cdot 10^9 \text{ cal}$$

oder, da nach Abb. 4, $Q_{opt} \sim 3,5\, Q_0$ ist, ergibt sich als Energieverbrauch unter optimalen Bedingungen etwa $3 \cdot 10^9$ cal zur Trennung eines Mols Chlor bei einem Reinheitsgrad von 99,5%. *Clusius* u. *Dickel* geben als tatsächlichen Energieverbrauch $3,7 \cdot 10^{10}$ cal an. Der zwölfmal größere Wert ist auf verschiedene Gründe zurückzuführen, nämlich u. a.:

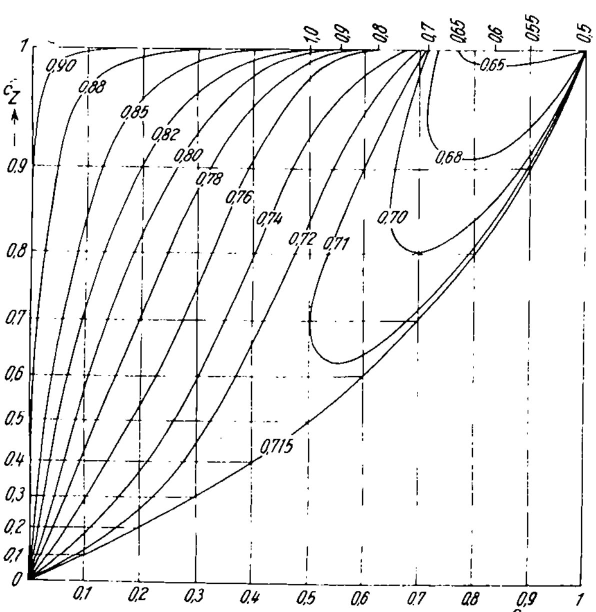
1. Die *Clusius-Dickel*-Rohre waren drahtgeheizt, es sind also in (9) für l und τ_0 die Formeln (20′) aus *J*. l. c. für eine zylindersymmetrische Anordnung zu benutzen, das hat zur Folge, daß in (10) und (11a) der Faktor 1,85 durch einen größeren Faktor zu ersetzen ist.
2. $(\Delta x_0/\Delta x)^6$ ist nicht ganz gegen 1 zu vernachlässigen, so daß in (11a) die geschweifte Klammer einen Faktor größer als 1 darstellt.
3. Der genaue Wert von α ist nicht bekannt, da er in (11a) quadratisch eingeht, so würde ein kleinerer Wert als unsere Schätzung den Energieverbrauch stark erhöhen.
4. Der Gasstrom G war nicht für geringsten Wärmeverbrauch optimal gewählt, so daß Q/Q_0 größer als 3,5 zu setzen ist.
5. Wärmeverluste durch Strahlung wurden in den Formeln 8—11 nicht berücksichtigt.

Zum Schluß möchte ich nicht versäumen, Herrn Prof. *H. Jensen* für die Anregung zu dieser Arbeit meinen verbindlichsten Dank auszusprechen. *Eingeg. 15. Januar 1942.* [A. 3.]

[4] Vgl. Z. physik. Chem., Abt. B **44**, 451 [1939].

Berichtigung.

In dem Aufsatz von Prof. Dr. *H. Jensen*: „Das *Clusius-Dickel*sche Trennrohr und die physikalisch-mathematische Theorie seiner Wirkungsweise und Leistungsfähigkeit" muß in Gleichung 20c auf S. 409 des vorigen Jahrgangs dieser Zeitschrift die **3.** Wurzel stehen. Die Gleichung lautet also: $\Delta x_0 = 7,52 \sqrt[3]{\frac{\eta D}{g\rho}\,\frac{T}{\Delta T}}$ Gleichung 5 ist bereits auf S. 523 berichtigt worden.



← Abb. 3. Optimaler Entnahmestrom G_{opt} in Einheiten G_{max}. Abscisse c_0, Ordinate c_z.

Die Kurven und beigeschriebenen Zahlen geben die zugehörigen Werte von G_{opt}/G_{max} an.

Abb. 4. Geringster Wärmeverbrauch Q_{opt} (bei $G = G_{opt}$) in Einheiten Q_0. Koordinaten wie in Abb. 3. →

Die Kurven und beigeschriebenen Zahlen geben die zugehörigen Werte von Q_{opt}/Q_{max} an.